Felix Klein und
Geschichte der Mathematik im Unterricht

Renate Tobies

Felix Klein (1849–1925) betrachtete Geschichte der Mathematik als einen grundlegenden Bestandteil der Allgemeinbildung von Lehramtskandidaten, damit sie eine „wissenschaftliche Unterrichtsmethode" verwirklichen können. Seine „genetische Methode" soll in die damalige Unterrichtsreform („Kleinsche" Reform) eingebettet werden. Zugleich wird an einigen Beispielen demonstriert, welche mathematischen Erkenntnisse Felix Kleins Gegenstand des Unterrichts sein können.

Vorbemerkung

Historische Aussagen sind immer zu interpretieren und quellenkritisch zu hinterfragen. Ein Beispiel mit Äußerungen über Felix Klein sei an den Beginn gesetzt. Georg Cantor (1945–1918) – dessen damals neuartige Arbeiten zur Mengenlehre Klein und Adolph Mayer (1839–1908) in die Mathematischen Annalen aufgenommen hatten (vgl. [TR90]) – schrieb am 13. Dezember 1893 an den italienischen Mathematiker Giulio Vivanti (1859–1949), um ihm seine „Ansichten über die pathologisch-mikrobiologischen Wesen, mit welchen Italiens Mathematik so gefährlich infiziert ist, etwas ausführlicher darzulegen." [Mes65, S. 504]

Cantor kritisierte in diesem Brief den Zahlbegriff, die „Ordnungen des Unendlichwerdens von Functionen [...]" etc. bei Johannes Thomae (1840–1921), Paul du Bois-Reymond (1831–1889), bei dem Österreicher Otto Stolz (1842–1905) und setzte fort:

> „Herr Professor Veronese (der wenn ich nicht irre aus der berühmten Schule des Herrn Professors Felix Klein ist, den er auch als einen gewaltigen mathematischen Heros verehrt) hat endlich auf den Schultern jener deutschen Vorgänger[1] in Verbindung mit den unklaren Ideen seines eben erwähnten Lehrers seine neue Theorie der actual unendlichen kleinen Segmente aufgebaut und ist mit dem Anspruch aufgetreten, durch dieselben neue Grundlagen für die Geometrie geschaffen zu haben." [Mes65, S. 505]

Der Seitenhieb auf Felix Klein erkennt dessen „Schule" an, verkennt jedoch die Kleinsche Arbeitsweise, die u. a. beinhaltete, dass dieser (auch unausgereifte) Ideen publizierte und jüngeren Mathematikern bewusst übergab, damit sie daran weiter feilten. So wurden viele Kleins „Schüler", die ihm für die angeregte eigene Kreativität mehrheitlich lebenslang dankbar waren. Dies

---

[1] Cantor subsumierte Otto Stolz unter die Deutschen.

bezeugt u. a. die große Zahl der Sponsoren für das von Max Liebermann (1847–1935) gemalte Felix Klein-Porträt (1912), zu denen Giuseppe Veronese (1854-1917) gehörte (vgl. [Tob21, S. 617]).

Veronese war durch Luigi Cremona (1830–03) zu Klein empfohlen worden. Er studierte drei Semester (1880/81–1881/82) in Leipzig, wo ihn Klein zu neuen Arbeiten führte.[2] Cantor bezog sich auf Veroneses Buch *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare* [Ver91], das drei Jahre später übersetzt bei Teubner erschien [Ver94]. Im Unterschied zu Cantor bezeichnete Tullio Levi-Civita (1873–1941) Veroneses Herangehen als meisterhaft und David Hilbert (1862–1943) urteilte: tiefgründig. Felix Klein schrieb, dass Veronese hier „[...] in abstraktester Form das rein wissenschaftliche Problem einer allgemeinen mehrdimensionalen und ‚nichtarchimedischen' Geomerie" behandelte [Kle25, S. 247]. Dieses Buch empfahl Klein nicht als Schulbuch, verwies aber auf weitere, für den Unterricht geeignete Bücher Veroneses [Kle25, S. 147-48].

Gleichungen fünften Grades

Felix Klein genoss am Gymnasium in Düsseldorf einen mathematischen Schulunterricht, in dem auch Gleichungen fünften Grades behandelt wurden. Das ist ein Schulstoff, der heute nicht selbstverständlich zum Lehrplan gehört, sich aber – unter Einbeziehen historischer Aspekte – ausgezeichnet zum Erklären größere Zusammenhänge eignet. Klein absolvierte das Abitur im Alter von 16; sämtliche schriftliche Abiturarbeiten sind erhalten. Gerd Fischer publizierte bereits Kleins Mathematikarbeit [Fis85]. Unter den vier Aufgaben war eine zur Algebra, die hier genannt sei:

> „Der Unterschied zweier Zahlen beträgt 2, der Unterschied ihrer fünften Potenzen 2882. Die Zahlen sollen gefunden werden. "

Kleins Lösungsweg sei kurz angedeutet:

- Heißen die Zahlen x und y, so:

$$I)\; x-y=2; \qquad II)\; x^5-y^5=2882$$

- Erheben wir I in die fünfte Potenz, so haben wir:

$$x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5=32$$

- Multiplizieren wir nun beide Seiten von II mit 4, so haben wir:

$$4x^5-4y^5=11528$$

[2] Vgl. Veroneses Arbeiten [Ver81a; Ver81b].

- Addieren wir nun die beiden Seiten und dividieren wir durch 5, so erhalten wir [...]
- Für x erhalten wir: $x = 5$ oder $x = -3$;
- Für y erhalten wir: $y = 3$ oder $y = -5$.

Dass Klein im Lösungsweg eine Gleichung fünften Grades benutzte, die auf Gleichungen niederen Grades zurückgeführt werden kann, deutet auf den behandelten Schulstoff. Das Thema kann gut historisch eingebettet werden. Es kann z. B. erklärt werden, seit wann bekannt ist, dass Gleichungen 2., 3. und 4. Grades mittels allgemeiner Lösungsformeln in Radikale (Wurzeln) auflösbar sind, dass dies für die allgemeine Gleichung fünften Grades

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

nicht gilt und Niels Henrik Abel (1802-1829) den ersten vollständigen Beweis dafür erbrachte etc.[3]

Kleins spätere Forschungsbeiträge zu diesem Themenfeld sind im Kontext mit dem Ikosaeder (einer der fünf regulären Polyeder) interessant. 1884 erschien Kleins Buch *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* [Kle84]; später publizierte er noch einen „besonders anschaulichen Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung – und also der allgemeinen Gleichung fünften Grades – durch Wurzelzeichen“, wie er es selbst ausdrückte [Kle05, S. 363].

Platonische Körper

Die fünf regulären Polyeder, neben dem Ikosaeder Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Pentagondodekaeder, waren bereits dem griechischen Philosophen Platon (428/427–348/347 v. u. Z.) bekannt, der sie in seinem Werk *Timaios* den damals als Elemente betrachteten Dingen (Erde, Wasser, Luft, Feuer) und dem Weltganzen zuordnete. Im Buch XIII der *Elemente* des Euklid (um 300 v. u. Z.) sind diese Körper mathematisch behandelt; und im letzten Satz wird der Beweis geführt, dass es keine weiteren regulären Polyeder gibt.

Felix Klein beurteilte diese Körper, auch das Falten ihrer Modelle aus Papier, als wichtigen Unterrichtsgegenstand:

> „Hermann Wiener[4] hat angegeben, wie man sich durch Papierfalten die Netze der regulären Körper verschaffen kann. Eigentümlicher Weise hat zu derselben Zeit ein indischer Mathematiker,

[3] Vgl. einen schönen Überblick in [Kle95, Kapitel 1 des ersten Abschnitts]: *Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen, welche sich durch Quadratwurzeln lösen lassen*.

[4] Hermann Wiener (1857–1939), seit 1894 Mathematik-Professor an der TH Darmstadt, hatte u. a. bei Felix Klein an der TH München und in Leipzig studiert.

> Sundara Row, in Madras, ein kleines Buch: ‚On paper folding', erscheinen lassen, in welchem derselbe Gedanke noch weitergehend verfolgt wird, indem beispielsweise gezeigt wird, wie man durch Papierfalten beliebig viele Punkte krummer Linien (z. B. Ellipse, Cissoide) construieren kann (London, Macmillan, 1893)." [Kle95, S. 33]

Das Buch des Inders Tandalem Sundara Row (*1853) *Geometrical Exercises in Paper Folding* [Sun93] war in Madras und London zugleich erschienen. Es wurde im Dezember 1894 in der britischen Zeitschrift *The Mathematical Gazette* positiv besprochen [Lan94], für die Ausbildung von Erzieher/innen empfohlen und erlebte mehrere Auflagen.

Kleins englische Doktorschülerin Grace Chisholm (Young) (1868–1944), die seit Herbst 1893 bei ihm in Göttingen studierte und dort 1895 promovierte, erarbeitete später, daran anknüpfend und angeregt durch Klein, ein *Beginner's Book of Geometry* [YY05]. Eine deutsche Übersetzung davon, *Der kleine Geometer*, erschien 1908 bei Teubner. Felix Klein lobte das Buch, schrieb darüber in Band II (Geometrie) seiner *Elementarmathematik*:

> „Hier soll ein neuer, origineller Weg gewiesen werden, das Kind in das geometrische Verständnis, und zwar sogleich in die dreidimensionale Raumanschauung, einzuführen. Die leitende Idee ist, daß die natürliche Raumanschauung notwendig erlahmen muß, wenn man das Kind von vornherein ausschließlich an das Zeichnen auf dem zwei-dimensionalen Papier gewöhnt und so seine Anschauung künstlich auf die Ebene beschränkt. So wird von vornherein mit dem interessanten Hilfsmittel des Papierfaltens operiert [...]. Dabei ergeben sich äußerst anschauliche und doch gleichzeitig logisch befriedigende Beweise z.B. für den pythagoreischen Satz, und es entsteht überhaupt ein neuer, interessanter, auch für den höheren Betrieb durchaus in Betracht kommender Aufbau der Geometrie." [Kle25, S. 236]

Klein, der dafür eintrat, „daß neben der Euklidischen Methode neuere Methoden der Geometrie in den Unterricht auf Gymnasien eingeführt werden" (so eine seiner fünf Thesen im Rahmen seines Promotionsverfahrens, Dez. 1868), lehnte Einseitigkeit ab. So betonte er neben der Anschauung stets auch den logischen Aspekt. In seinem Seminar des WS 1894/95 ließ er z. B. nebst dem *Wichtigsten aus der Mannigfaltigkeitslehre* (Mengenlehre)[5] auch das *Irrationale bei Euklid* diskutieren.

[5] Der zur Mengenlehre Vortragende Wilhelm Lorey (1873–1955) erklärte: „Der Vortrag hat den Zweck einige wichtige Grundbegriffe, die zum größten Teil von Georg Cantor geschaffen worden sind, vorzuführen und zu erläutern, weil in den kommenden Seminarvorträgen sie fortwährend gebraucht werden müssen." Er gliederte

Den Vortrag *Einführung des Irrationalen bei Euclid* hielt der später als Sprachforscher bekannte Ludwig Schütz (1873–1941), der ausführlich in das Protokollbuch [Kle12, Bd. 12: S. 139–151] eintrug, das Auftreten irrationaler Größen (Strecken) historisch einbettete, die Diagonale im Quadrat und irrationale Größen an den fünf regulären Polyedern hervorhebend. Schütz beschrieb den Inhalt der *Elemente*, insbesondere Buch X, und unterbreitete eine „Tabelle der Irrationallinien". Schütz hatte für den Vortrag acht Titel von Primär- und Sekundärliteratur zur Geschichte der Mathematik benutzt.

Klein ließ das Mathematische Lesezimmer in Göttingen mit den wichtigsten Büchern zur Mathematikgeschichte ausstatten. Er sorgte auch dafür – abgestimmt mit Alfred Ackermann-Teubner (1857–1941) –, dass eine spezifische Zeitschrift in das Teubner-Zeitschriftenprogramm aufgenommen wurde. Der Verlag erwarb die *Bibliotheca Mathematica*, die der Schwede Gustaf Eneström (1852–1923) 1884 begründet hatte; sie erschien zunächst in verschiedenen Verlagen. Mit dem Wechsel zu Teubner (1900) erhielt die Zeitschrift einen größeren Umfang, konnte jedoch den Ersten Weltkrieg nicht überleben. (vgl. [Tob19, S. 272-274])

Aus- und Fortbildung von Lehrpersonen

Studierende der Mathematik waren an deutschen Universitäten bis 1942 hauptsächlich Lehramtskandidaten.[6] Somit ist es verständlich, wenn dem Unterricht an den (höheren) Schulen sowie der Aus- und Weiterbildung von Lehrpersonen besondere Aufmerksamkeit gewidmet wurde. Bereits als 23-Jähriger zielte Felix Klein in seiner Antrittsrede (7. Dez. 1872) als Professor an der Universität in Erlangen darauf, das in Schülerkreisen verbreitete Urteil zu überwinden, „dass es auf Mathematik doch nicht ankomme" und plädierte – neben „logischer Exposition" für eine (neue) anschauliche Lehrmethode, die auch Übungen im Zeichnen und Modellieren umfassen sollte. In diesem Sinne prägte er die Losung:

„Schaffen wir bessere Lehrer, so wird der Unterricht von selbst

das Thema in 13 Punkte und schrieb am Ende seines Referats: „Nach diesem Vortrag wurde durch Herrn Prof. Klein darauf hingewiesen, welche wichtige Anwendung die Mannigfaltigkeitslehre gefunden hat bei[m] Mittag-Lefflerschen Theorem (Mittag-Leffler Acta Mathematica Bd. IV.") [Kle12, Bd. 12: S. 90–93]. – Anschließend sprach Kleins damaliger Assistent Arnold Sommerfeld (1868–1951) über Bernard Bolzanos (1781–1848) Paradoxien des Unendlichen sowie über Gösta Mittag-Lefflers (1846–1927) Theorem [Kle12, Bd. 12: S. 93–96]. – In Band I von Kleins *Elementarmathematik* befindet sich ein Anhang *Die Mengenlehre* [Kle24, S. 271–290].

6 Seit 1895 existierte an der Universität Göttingen ein Studiengang Versicherungsmathematik; die Zahl dieser Absolventen war jedoch gering. Ein Diplomstudiengang an Universitäten wurde erstmals 1942 eingeführt; an einzelnen Technischen Hochschulen bereits seit den 1920er Jahren (vgl. detaillierter hierzu [ANT04]).

> besser, dann wird die alte ihm zugewiesene Form sich mit neuem, lebenskraeftigen Inhalte fuellen!" [Jac77, Bl. 1–19, bes. Bl. 15]

Zu Beginn der 1890er Jahre, als die Zahl der Mathematikstudierenden gesunken war (dies geschah regelmäßig in Form einer Wellenbewegung und war abhängig von den offenen Stellen an höheren Schulen – vgl. bspw. [Tit81]), fand Klein einen neuen Weg, um sich intensiver um bereits in der Schule (Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen) tätige Lehrpersonen zu kümmern. Er kreierte 1892 erstmals mathematische Ferienkurse (Fortbildungskurse) an der Universität Göttingen und trat mit dem 1890 gegründeten Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (kurz: Förderverein) in Kontakt.

Im ersten Ferienkurs (Oktober 1892) standen „Modelle & Kreiseltheorie" im Zentrum. Im März 1893 hospitierte Klein an Hannoveraner Gymnasien, um von Lehrern selbst zu erfahren, welche Gebiete für sie besonders wichtig sind. Über das Resultat erklärte er:

> „[...] jetzt Transcendenz von π, später Grundbegriffe der Geometrie, besonders Parallelentheorie [...]. Ein Colleg über Axiome der Geometrie hat für den Lehrer directeren Bildungswerth als eines über algebraische Curven, ein Colleg über Wahrscheinlichkeitsrechnung mehr als eines über Determinanten." (zitiert in [Tob19, S. 351])

Im selben Jahr 1893 lieferten David Hilbert, Adolf Hurwitz (1859–1919), Paul Gordan (1837–1912) neue, vereinfachte Beweise für die Transzendenz von π (und e), die Klein bereits 1893 in den USA bekannt machte, gemeinsam in ein Heft der *Mathematischen Annalen* aufnahm,[7] und in den nächsten Ferienkurs (März 1894) integrierte. Den Beweis für π behandelte er im Kontext mit der „Quadratur des Kreises" (Versuch, einen Kreis in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln), einem der klassischen geometrischen Probleme, die mit den Konstruktionshilfsmitteln Zirkel und Lineal allein nicht zu realisieren sind. Im Ferienkurs wurden die beiden anderen dieser Probleme, Verdoppelung des Würfels und Dreiteilung des Winkels, ebenfalls verknüpft mit neueren Ergebnissen dargeboten.

Klein setzte das Themenfeld fort, indem er im SoSe 1894 zweistündig über „Ausgewählte Fragen der Elementargeometrie" las, die Hörer/innen[8]

---

[7] [Gor93; Hil93; Hur93]. – Kleins Doktorschüler Ferdinand Lindemann (1852–1939) bewies 1882 erstmals, dass π eine transzendente Zahl ist. Charles Hermite (1822–1901) führte 1873 den ersten Beweis für die Transzendenz von e. – Klein integrierte auch in Band I seiner *Elementarmathematik* einen Anhang zu den Beweisen der Transzendenz von e und π, um die Ergebnisse breiter bekannt zu machen. [Kle24, S. 256-271]

[8] Nach dem Hörerverzeichnis waren es: „Noble, C.A.; Snyder; Lorey, W.; Fano, G.;

bat, Mitschriften anzufertigen, auf deren Basis der Gymnasialehrer Friedrich Tägert (1863–1950) – er hatte am Ferienkurs im März 1894 teilgenommen – eine publikationsreife Darstellung lieferte. Bei Teubner gedruckt (66 Seiten), präsentierte Klein dies dem Förderverein als Festschrift bei deren Versammlung, die – veranlasst durch ihn – Pfingsten 1895 in Göttingen stattfand. Die Festschrift *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie* [Kle95] fand auch international großes Interesse, wurde rasch ins Französische (1896), Italienische (1896), Englische (1897), Japanische (1897), Russische (1898) übersetzt.

In Göttingen wurden entsprechende Ferienkurse aller zwei Jahre (mit Unterbrechung durch den Ersten Weltkrieg) durchgeführt, 1909 auch erstmals für Lehrkräfte an höheren Mädchenschulen (durch die preußische Mädchenschulreform von 1908 war hier Mathematik und Naturwissenschaften ein höherer Stellenwert eingeräumt worden). Klein gewann jeweils zahlreiche Göttinger Kollegen für die inhaltliche Gestaltung der Ferienkurse; dazu gehörten die Privatdozenten für Geschichte bzw. Didaktik der Mathematik.

Dass sich Conrad Heinrich Müller (1878–1953), der unter Kleins Ägide bereits mit einem mathematikhistorischen Thema promoviert hatte, im Jahre 1908 – dank Klein – als Erster für *Mathematik, namentlich Geschichte der Mathematik* habilitierte, ergab ein tieferer Blick in die Akten. Dass Rudolf Schimmack (1881–1912) im Jahre 1911 – ebenfalls dank Klein – die deutschlandweit erste Privatdozentur für *Didaktik der Mathematik* erhielt, ist seit längerer Zeit gut bekannt. (vgl. [Tob19, S. 412-413, 433–434])

Kleins genetische Methode im Mathematikunterricht

Klein reflektierte.

> „Meine Art, Historie zu treiben. Voranstellung bestimmter Fragen, – und nun Vergleich der Quellen.“ (zitiert in [Tob19, S. 411])

Es ist nicht nur hervorhebenswert, dass Klein selbst Quellen edierte (Gauß' wissenschaftliches Tagebuch) und die Edition der Werke bedeutender Mathematiker (August Ferdinand Möbius; Hermann Graßmann, Gauß) anregte, betreute bzw. leitete. Klein betrachtete mathematikhistorische Kenntnisse ebenso als wichtigen Aspekt seiner eigenen Lehre und des Mathematikunterrichts an den Schulen.

Die mathematische Unterrichtsreform (von Zeitgenossen bereits als „Kleinsche Unterrichtsreform“ bezeichnet) hatte einen ihrer Höhepunkte mit dem Mathematik-Reformlehrplan (Meraner Lehrplan 1905). Darin ist – neben anderen maßgeblichen Aspekten – eine „genetische Unterrichtsmethode“ betont; d. h. das Entstehen mathematischer Erkenntnisse sollte im Schulunterricht beachtet werden. In Band I seiner *Elementarmathematik* beschrieb Klein

---

Wiger, J.; Jaccottet, C., Heegaard, P.; Metzler, G. F.; Ehlers, J.; Schütz, L.; Frl. Chisholm; Frl. Winston; Campbell, G.A.; Siedentopf, H.“

seine Vorstellungen näher. Ausgehend von seinem Prinzip der „Allseitigkeit" argumentierte er, dass die Lehrperson in der Schule sowohl die rein logische Begründung des Stoffes (Richtung A) beherrschen müsse, aber auch das Anwenden der Grundsätze auf reale Verhältnisse (Richtung B). Da Richtung B lange Zeit vernachlässigt worden sei, sollte diese Richtung künftig stärker beachtet werden. Als ein wesentliches Mittel hierfür sah Klein *das Durchdringen der genetischen Unterrichtsmethode* (neben den Aspekten: Raumanschauung; Voranstellen des Funktionsbegriffs unter Fusion von Raum- und Zahlbegriff) (vgl. [Kle24, S. 92]). Klein beschrieb in diesem Band den historischen Entwicklungsgang einiger Gebiete und meinte generell:

> „Man hat vielfach gemeint, daß man die Mathematik durchaus deduktiv unterrichten könne oder gar müsse, indem man eine bestimmte Zahl von Axiomen an die Spitze stellt und daraus alles rein logisch herleitet. Dies Verfahren, welches man so gern durch die Autorität des Euklid stützt, ist jedenfalls nicht dem geschichtlichen Werdegang der Mathematik selbst entsprechend. Tatsächlich hat sich die Mathematik entwickelt wie ein Baum, der nicht von den feinsten Verästelungen der Wurzeln beginnend lediglich nach oben wächst, der vielmehr erst in dem Maße, wie er nach oben hin seine Zweige und Blätter immer mehr ausbreitet, auch nach unten zu seinen Wurzeln tiefer und tiefer treibt." [Kle24, S. 16]

Nach einem Überblick über Grundbegriffe und Entwicklung der Mengenlehre [Kle24, S. 271-290] stellte Klein die rhetorische Frage: „Was kann man davon auf der Schule gebrauchen?" In seiner Antwort schloss er die Aufnahme entsprechender abstrakter Sachverhalte nicht generell aus – sie sollten nur nicht zu früh behandelt werden. Klein argumentierte mit Ernst Haeckels (1834–1919) biogenetischem Grundgesetz[9] und betonte noch einmal den Wert historischer Kenntnisse. Dies sei ausführlicher zitiert:

> „Wir müssen natürlich von unserem mathematisch-pädagogischen Standpunkt dagegen Einspruch erheben, daß man dem Schüler mit derart abstrakten und schwierigen Dingen zu früh kommt. Ich möchte, um meine Ansicht, über diesen Punkt zu präzisieren, das *biogenetische Grundgesetz* heranziehen, nach welchem das Individuum in seiner Entwicklung in abgekürzter Reihe alle

[9] Dieses Grundgesetz betrifft das Verhältnis von Ontogenese (individuelle Entwicklung des Lebewesens) und Phylogenese (stammesgeschichtliche Entwicklung der Art); das Individuum wiederhole in seiner Entwicklungsphase den Prozess der gesamten Entwicklung der Art. Wenn auch Haeckels weitgehende Theorie heute nicht mehr vollumfänglich geteilt wird, so wird ihr doch noch heuristische Bedeutung zugeschrieben.

> Entwicklungsstadien der Gattung durchläuft [...]. Dies Grundgesetz, denke ich, sollte auch der mathematische Unterricht [...] wenigstens im allgemeinen befolgen: *Er sollte, an die natürliche Veranlagung der Jugend anknüpfend, sie langsam auf demselben Wege zu höheren Dingen und schließlich auch zu abstrakten Formulierungen führen, auf dem sich die ganze Menschheit aus ihrem naiven Urzustande zu höherer Erkenntnis emporgerungen hat*. Es ist nötig, diese Forderung immer wieder zu stellen, denn immer wieder gibt es Leute, die nach der Art der mittelalterlichen Scholastiker ihren Unterricht mit den allgemeinsten Ideen beginnen und diese Methode als die „alleinwissenschaftliche" rechtfertigen wollen. Und doch ist diese Begründung nicht einmal wahr: *Wissenschaftlich unterrichten kann nur heißen, den Menschen dahin bringen, daß er wissenschaftlich denkt, keineswegs aber, ihm von Anfang an mit einer kalten, wissenschaftlich aufgeputzten Systematik ins Gesicht springen*.
>
> Ein wesentliches Hindernis der Verbreitung einer solchen naturgemäßen und wahrhaft wissenschaftlichen Unterrichtsmethode ist wohl der *Mangel an historischen Kenntnissen*, der sich so vielfach geltend macht. [...]
>
> Lernen Sie [...] wie langsam alle mathematischen Ideen erst entstanden sind [...] und erst in langer Entwicklung die starre und auskristallisierte Form der systematischen Darstellung annahmen! Möge diese Erkenntnis einst – mit diesem Wunsche möchte ich meine Vorlesung schließen – nachhaltigen Einfluß auf die Gestaltung Ihres eigenen Unterrichts an der Schule gewinnen!" [Kle24, S. 289-290]

Diese Vorlesung hatte Klein erstmals im WS 1907/08 gehalten. Sie umfasste auch historische Exkurse zur Analysis. Da Infinitesimalmathematik im Rahmen des Meraner Lehrplans nur empfohlen worden war, aber nicht als obligatorisch galt, sah sich Klein veranlasst, dies mit seiner Lehre besonders zu fördern. In einer *Vorlesung über die moderne Entwicklung des mathematischen Unterrichts* (WS 1910/11)[10] betonte er u. a., wie außerordentlich wichtig dieser Stoff für den Physikunterricht ist:

> „Die *Mechanik*, wie sie in althergebrachter Art auf der Schule gelehrt wird, erfordert folgende Stücke der *Infinitesimalrechnung*:
>
> Bei den *Fallgesetzen*, wo Geschwindigkeit und Beschleunigung

[10] Diese zweistündige Vorlesung wurde nicht publiziert, aber von Kleins damaligem Assistenten Erich Hecke (1887–1947) ausgearbeitet, befindet sich im Hecke-Nachlass [Hec11].

> vorkommen, braucht man den Begriff des ersten und zweiten Differentialquotienten.
>
> Der *Begriff der Arbeit* erfordert den Integralbegriff. Die *Barometerformel und die Formel für die Pendelschwingungen* benutzt die Exponential- und trigonometrischen Funktionen und zwar nach ihren Differentialeigenschaften.
>
> Ein neues Gebiet der Mathematik wird in der *Elektrodynamik* und *Optik* benutzt. Dort tritt beim Potential der Begriff der Kraftlinien und ihrer orthogonalen Trajektorien auf, d. h. von Integralkurven gewissen Differentialgleichungen. [...]“ [Hec11]

In seinem Seminar des WS 1911/12 ließ Klein historische Quellen zu dem Thema Infinitesimalmathematik analysieren. Er eröffnete das Seminar am 1. November 1911 mit folgenden Worten:

> „Zweck des diesmaligen Seminars soll ein Studium der Entstehungsgeschichte unserer heutigen Infinitesimalrechnung aus den Quellen selbst sein.
>
> Wir beginnen mit der Theorie der unendlich kleinen Grössen, wie sie von Leibniz und seinen Schülern gehandhabt wurde. Wir haben ferner die Methoden der Reihenentwicklungen kennen zu lernen und endlich die Anwendung des Gränzbegriffs [sic!].
>
> Daneben werden wir zu untersuchen haben, wie die Mathematiker vor Leibniz und Newton sich mit dem Infinitesimalproblem auseinandersetzten: von Archimedes beginnend bis hin zu den Neueren.
>
> Klein.“ [Kle12, Bd. 29, S. 157][11]

Felix Klein besaß eine breite Literaturkenntnis. Für Fragen des Unterrichts vertiefte er dies seit 1908 mit seinen Arbeiten als Vorsitzender der *Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission (IMUK).* Er erkannte u. a., dass der Schotte Benchara Branford (1867–1944) ebenfalls eine genetische Unterrichtsmethode bevorzugte [Bra08], ließ dessen Buch in seinem Seminar (am 26.1.1910) analysieren, anschließend übersetzen und bei Teubner publizieren [Bra13]. Als parteiloser Repräsentant der Universität Göttingen im preußischen „Herrenhaus“ (Erste Kammer des Parlaments) argumentierte

[11] Im Seminar wurden 23 Vorträge von 22 Beteiligten gehalten. Darunter waren fünf Studentinnen, unter diesen Iris Runge (1888–1966) – die als einzige zweimal vortrug – und Felix Kleins jüngste Tochter Elisabeth (1888–1968) [Kle12, Bd. 29, S. 275]. – Felix Klein zog sich am 29. November 1911 ins Sanatorium nach Hahnenklee zurück (vgl. [Tob19, S. 442]); Rudolf Schimmack führte das Seminar zu Ende.

Klein mit dem Ausdruck: Der mathematische Unterricht muss „vom Kindergarten mit seinen eigentümlichen hochinteressanten Problemen beginnend, bis hoch hinaus zum Hochschulbetrieb“ verbessert werden (vgl. [Tob19, S. 437]).

Zur selben Zeit managte Klein drei theoretische Großprojekte, in die er historische Darstellungen integrierte bzw. zu integrieren beabsichtigte. Dazu gehörten ein bereits ausgearbeitetes Konzept für einen Abschlussband VII (Geschichte, Philosophie und Didaktik der Mathematik) der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, der jedoch nicht vollendet wurde (vgl. [94]), der Mathematik-Band des Projekts *Kultur der Gegenwart* mit historischen Teilen [Tob08] sowie die *Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland* (5 Bde.), die Klein, veranlasst durch die IMUK, herausgab.

Aus dem letzteren Projekt seien zwei Hefte hervorgehoben:

- Gebhardt, Martin (1912). *Die Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterrichte der höheren Schulen Deutschlands, dargestellt vor allem auf Grund alter und neuer Lehrbücher und der Programmabhandlungen höherer Schulen*. [Geb12]
- Lietzmann, Walter (1909). *Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen aufgrund der vorhandenen Lehrbücher*. [Lie09]

Lietzmann besprach das Thema Geschichte der Mathematik als einen „Zweig der freien Arbeiten“ und erwähnte den besonderen Wert des Studiums von Originalquellen. Er führte zur Geschichte der Mathematik aus:

> „[...] es ist hier ganz allgemein eine Besserung eingetreten. Davon zeugen in großer Anzahl die Lehrbücher, die geschichtliche Notizen über Mathematiker, über einzelne Lehrsätze u. dgl. einstreuen oder am Ende in einem besonderen Kapitel zusammenstellen. [...] Es ist von großem Wert für die gesamte Klasse, wenn ein Schüler etwa über die Anfänge der Trigonometrie oder der Logarithmenlehre an der Hand von Tropfkes Geschichte der Elementarmathematik berichtet. Aber unvergleichlich lehrreicher noch ist das Studium geeigneter Originalabhandlungen.“ [Lie09, S. 80]

Aktuell sind gewiss andere Gegenstände für die historische Betrachtung noch besser für den Unterricht geeignet. Die Münchener Gymnasiallehrerin Ulrike Schätz, die in ihrer Schulbuchreihe jedes Hauptkapitel historisch einleitete (und im eigenen Unterricht ausnahmslos positive Erfahrungen damit sammelte), hat im Schulbuch für Schuljahr 9 [SE07], Kapitel 8 *Fortführung der Raumgeometrie* Möbiusband und Kleinsche Flasche integriert, nebst einer Kurzbiographie Kleins (S. 172–73).

Abschließend sei Klein noch einmal zitiert, der historische Kenntnisse als eine maßgebliche Basis für gute Lehre und Forschung sah, das eigentliche Unterrichten aber auch als eine „Kunst“ betrachtete:

> „Soll ich mich im allgemeinen Sinne über Paedagogik aeussern, so will ich folgende Betrachtung vorausschicken: Man kann das paedagogische Problem mathematisch formulieren, indem man die individuellen Qualitäten des Lehrers und seiner n Schüler als ebensoviele Unbekannte einführt, und nun verlangt, eine Function von $(1+n)$ Variablen:
>
> $$F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$
>
> unter gegebenen Nebenbedingungen zu einem Maximum zu machen. Ließe sich dieses Problem eines Tages entsprechend den bis dahin realisirten Fortschritten der psychologischen Wissenschaft direct mathematisch behandeln, so wäre die (practische) Paedagogik von da ab eine *Wissenschaft*, – so lange das aber nicht der Fall ist, muss sie als *Kunst* gelten.“ [Kle99, S. 133]

Literatur

[ANT04] Andrea E Abele, Helmut Neunzert und Renate Tobies. *Traumjob Mathematik!: Berufswege von Frauen und Männern in der Mathematik*. Basel: Birkhäuser, 2004.

[Bra08] Benchara Branford. *A study of mathematical education*. Oxford: Clarendon, 1908.

[Bra13] Benchara Branford. *Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität*. Deutsch bearb. von Rudolf Schimmack und Hermann Weinreich. Leipzig/Berlin: BG Teubner, 1913.

[Fis85] Gerd Fischer. „Abitur 1865: Reifeprüfungsarbeit in Mathematik von Felix Klein“. In: *Der mathematische und der naturwissenschaftliche Unterricht* 38 (1985), S. 459–465.

[Geb12] Martin Gebhardt. *Die Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterrichte der höheren Schulen Deutschlands: dargestellt vor Allem auf Grund alter und neuer Lehrbücher und der Programmabhandlungen höherer Schulen*. Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland Bd. 3, Nr. 6. B.G. Teubner, 1912.

[Gor93] Paul Gordan. „Transcendenz von e und π“. In: *Mathematische Annalen* 43 (1893), S. 220–221.

[Hec11] Erich Hecke. *Ausarbeitung der Vorlesung Felix Kleins „Vorlesung über die moderne Entwickelung des mathematischen Unterrichtes“ aus dem WS 1910/11*. Göttingen: Nachlass Erich Hecke an der SUB Göttingen, 1911.

[Hil93] David Hilbert. „Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π“. In: *Mathematische Annalen* 43 (1893), S. 216–219.

[Hur93] Adolf Hurwitz. „Beweis der Transcendenz der Zahl *e*“. In: *Mathematische Annalen* 43 (1893), S. 222–224.

[Jac77] Konrad Jacobs. *Felix Klein. Handschriftlicher Nachlaß*. Erlangen: Mathematisches Institut der Universität, 1977.

[Kle84] Felix Klein. *Vorlesungen über das Ikosaeder: und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*. (Reprint mit Einleitung und Kommentaren von P. Slodowy, 1993) – Trans. by George Gavin Morris (Lectures on the Ikosahedron and the solution of equations of the fifth degree) London: Trübner & Co., Ludgate Hill, 1888; Dover Publications Inc, New York, N.Y, 1956¸ Paperback Reprint 2007. B.G.Teubner, 1884.

[Kle95] Felix Klein. *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*. Ausgearbeitet von F. Tägert (Festschrift zu der in Göttingen stattfindenden dritten Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts). (Übers. ins Franz., Ital., Engl., Japan., Russ.) Teubner, 1895.

[Kle99] Felix Klein. „Über Aufgabe und Methode des mathematischen Unterrichts an den Universitäten.“ In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 7 (1899), S. 126–138.

[Kle05] Felix Klein. „Beweis für die Nichtauflösbarkeit der Ikosaedergleichung durch Wurzelzeichen“. In: *Mathematische Annalen* 61.3 (1905), S. 369–371.

[Kle12] Felix Klein. *29 Protokollbände der Seminare Felix Kleins*. Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek, 1912. URL: https://www.uni-math.gwdg.de/aufzeichnungen/klein-scans/klein/.

[Kle24] Felix Klein. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Bd. I: Arithmetik, Algebra, Analysis. Für den Druck fertig gemacht und mit Zusätzen versehen von Fr. Seyfarth (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 14) – Latest Engl. trans. G. Schubring 2016. Berlin: Julius Springer, 1924.

[Kle25] Felix Klein. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Bd. II: Geometrie. Für den Druck fertig gemacht und mit Zusätzen versehen von Fr. Seyfarth (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 15) – Latest Engl. trans. G. Schubring 2016. Berlin: Julius Springer, 1925.

[Lan94] „Books and Magazines Received“. In: *The Mathematical Gazette* 3 (1894). Hrsg. von E.M. Langley, S. 24–24.

[Lie09] Walther Lietzmann. *Stoff und Methode im mathematischen Unterricht der norddeutschen höheren Schulen auf Grund der vorhandenen Lehrbücher*. Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland Bd. 1, Nr. 1. B.G. Teubner, 1909.

[94] „Mathematik als Bestandteil der Kultur – Zur Geschichte des Unternehmens ‚Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss

ihrer Anwendungen“. In: *Mitteilungen der Österreichischen Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte* 14 (1994), S. 1–90.

[Mes65] Herbert Meschkowski. „Aus den briefbüchern georg cantors“. In: *Archive for History of Exact Sciences* 2.6 (1965), S. 503–519.

[SE07] Ulrike Schätz und Franz Eisentraut, Hrsg. *delta 9. Bayern. Schülerbuch. Mathematik für Gymnasien*. Auflage 2013. CC Buchner, 2007.

[Sun93] Tandalam Sundara Rao. *Geometric exercises in paper folding*. Madras, London, 1893.

[Tit81] Hartmut Titze. „Überfüllungskrisen in akademischen Karrieren, eine Zyklustheorie“. In: *Zeitschrift für Pädagogik* 27 (1981), S. 187–224.

[Tob08] Renate Tobies. „Mathematik, Naturwissenschaften und Technik als Bestandteile der Kultur der Gegenwart“. In: *Berichte zur Wissenschaftsgeschichte* 31.1 (2008), S. 29–43.

[Tob19] Renate Tobies. *Felix Klein: Visionen für Mathematik, Anwendungen und Unterricht*. Springer-Verlag, 2019.

[Tob21] Renate Tobies. *Felix Klein. Visions for mathematics, applications, and education. Translated from the German by Valentine A. Pakis*. Revised edition. Bd. 20. Vita Mathematica. Cham: Birkhäuser, 2021.

[TR90] Renate Tobies und David Rowe. *Korrespondenz Felix Klein—Adolph Mayer: Auswahl aus den Jahren 1871–1907*. Bd. 14. Teubner-Archiv zur Mathematik. Springer, 1990.

[Ver81a] Giuseppe Veronese. „Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Prjjicirens und Schneidens.“ In: *Mathematische Annalen* 19.2 (1881), S. 161–234.

[Ver81b] Giuseppe Veronese. „Die Anzahl der unabhängigen Gleichungen, die zwischen den allgemeinen Charakteren einer Curve im Raum von *n* Dimensionen ststtfinden.“ In: *Mathematische Annalen* 18 (1881), S. 448.

[Ver91] Giuseppe Veronese. *Fondamenti di geometria a più dimensioni ea più specie di unità rettilinee esposti in forma elementarel: lezioni per la scuola di magistero in matematica*. Tipografia del seminario, 1891.

[Ver94] Giuseppe Veronese. *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt*. BG Teubner, 1894.

[YY05] G.C. Young und W.H. Young. *The First Book of Geometry*. Dent’s mathematical and scientific text books for schools. J.M. Dent, 1905. URL: https://books.google.de/books?id=kTBLAAAAYAAJ.